

STATISTIKA MATEMATIKA

Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika



GRAHA ILMU

STATISTIKA MATEMATIKA

Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika

Prof. Drs. Subanar, Ph.D

STATISTIKA MATEMATIKA

Probabilitas, Distribusi, dan Asimptosis dalam Statistika

Penulis: Prof. Drs. Subanar, Ph.D

Edisi Pertama

Cetakan Pertama, 2013

Hak Cipta © 2013 pada penulis,

Hak Cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apa pun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya, tanpa izin tertulis dari penerbit.



GRAHA ILMU

Ruko Jambusari No. 7A

Yogyakarta 55283

Telp. : 0274-889836; 0274-889398

Fax. : 0274-889057

E-mail : info@grahailmu.co.id

Subanar, Prof., Drs., Ph.D

STATISTIKA MATEMATIKA: Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika
/Prof. Drs. Subanar, Ph.D

-Edisi Pertama - Yogyakarta; Graha Ilmu, 2013
viii + 180 hlm, 1 Jil.: 26 cm.

ISBN: 978-979-756-955-6

1. Statistika 2. Matematika

I. Judul

KATA PENGANTAR

Penulis memanjatkan rasa syukur kepada Allah SWT atas limpahan rahmat-Nya sehingga buku *Statistika Matematika: Probabilitas, Distribusi, dan Asimtotis dalam Statistika* dapat diterbitkan. Buku ini disusun untuk mahasiswa FMIPA atau FPMIPA dan Pascasarjana Matematika dalam mempelajari statistika matematika yang menekankan pada teori probabilitas sebagai dasar inferensi.

Buku ini diharapkan mampu memberikan pemahaman pada mahasiswa bahwa statistika matematika mempunyai akar yang kuat dalam matematika karena matematika merupakan bahasa untuk pemodelan statistika yang dirumuskan. Penjelasan tentang konsep dasar teori himpunan mengawali pembahasan dalam buku ini, dan diakhiri dengan teori asimtotis dalam statistika.

Introduction to Mathematical Statistics karangan Hogg, Mc. Kean dan Craig dan *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics* dari V.R. Rohatgi, ditambah delapan belas referensi yang tertulis dalam daftar pustaka merupakan bahan utama penyusunan. Semua referensi diramu sesuai dengan pengalaman penulis mengampu mata kuliah Statistika Matematika baik pada program S1 dan S2 di FMIPA UGM sejak tahun 1990. Meskipun teorema-teorema yang tertulis dalam buku ini sudah familiar bagi para statistikawan, tetapi dalam beberapa hal yang sangat spesifik sumber acuan tetap ditulis untuk memudahkan pencarian acuan utama.

Dengan terbitnya buku ini, tak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada Jurusan Matematika FMIPA UGM dan MGB (Majelis Guru Besar) UGM atas kerjasamanya. Ucapan terima kasih penulis haturkan juga kepada ketua dan sekretaris MGB UGM sehingga buku ini mendapat dukungan dari MGB UGM.

Akhirnya, penulis berharap semoga buku ini dapat memberikan kontribusi yang berarti, terutama dalam mempelajari statistika matematika. Oleh karena itu, saran dan kritik demi perbaikan buku ini sangat diharapkan.

Yogyakarta, September 2012

Prof. Subanar, Ph.D.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
BAB I KONSEP DASAR TEORI HIMPUNAN	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Ruang Sampel dan Kejadian	1
1.3 Operasi Kejadian	3
1.4 Fields dan σ -fields	9
1.5 Limit Himpunan	13
1.6 Latihan	18
BAB II PROBABILITAS	19
2.1 Pendahuluan	19
2.2 Probabilitas Klasik dan Frekuensi Relatif	19
2.3 Probabilitas Aksiomatik	21
2.4 Probabilitas Bersyarat	29
2.5 Kejadian Bebas atau Independen	32
2.6 Rumus Bayes	34
2.7 Latihan	38
BAB III VARIABEL RANDOM DAN DISTRIBUSINYA	41
3.1 Pendahuluan	41
3.2 Variabel Random	41
3.3 Variabel Random Diskret	46
3.4 Variabel Random Kontinu	50
3.5 Harga Harapan	61
3.6 Harga Harapan Khusus	65
3.7 Beberapa Ketaksamaan dalam Statistika	71
3.8 Latihan	73

BAB IV DISTRIBUSI MULTIVARIAT	77
4.1 Pendahuluan	77
4.2 Distribusi Dua Variabel Random	77
4.3 Harga Harapan	86
4.4 Transformasi Variabel Random Bivariat	91
4.5 Distribusi dan Harga Harapan Bersyarat	99
4.6 Variabel Random Independen	106
4.7 Vektor Random untuk $n \geq 3$	111
4.8 Transformasi Vektor Random	116
4.9 Latihan	120
BAB V DISTRIBUSI KHUSUS	123
5.1 Pendahuluan	123
5.2 Beberapa Distribusi Diskret	123
5.3 Beberapa Distribusi Kontinu	134
5.4 Latihan	145
BAB VI ASIMTOTIS DALAM STATISTIKA	147
6.1 Pendahuluan	147
6.2 Macam-macam Konvergensi	147
6.3 Hukum Bilangan Besar Lemah dan Kuat	160
6.4 Limit Fungsi Pembangkit Momen	164
6.5 Teorema Limit Pusat dan Terapannya	167
6.6 Latihan	173
DAFTAR PUSTAKA	175
DAFTAR INDEKS	177
TENTANG PENULIS	179

BAB 1

KONSEP DASAR TEORI HIMPUNAN

1.1 PENDAHULUAN

Teori probabilitas adalah dasar Statistika Matematika. Dalam pemodelan fenomena random seperti pemodelan populasi atau eksperimen alat yang paling berperan adalah probabilitas. Melalui model-model tersebut, statistikawan bisa melakukan inferensi atau mengambil kesimpulan tentang populasi berdasarkan informasi sampel yang merupakan bagian dari populasi. Teori probabilitas mempunyai catatan sejarah yang kaya dan panjang, dimulai sekitar abad ke-17, saat the Chevolier de Mere, Pascal, dan Fermat membangun formula matematika dalam perjudian.

Dalam buku ini, pembahasan probabilitas tidaklah murni teoritis, tetapi lebih pada ide-ide dasar teori probabilitas yang merupakan dasar dalam mempelajari statistik.

Sebelum membicarakan ide dasar teori probabilitas pada bab II, kita akan membicarakan teori himpunan yang merupakan akar probabilitas.

1.2 RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

Tujuan utama statistika adalah mengambil kesimpulan tentang populasi berdasarkan informasi yang didapat melalui eksperimen. Langkah pertama dalam usaha ini adalah mengidentifikasi semua hasil (*outcome*).

Definisi 1.2.1. *Himpunan semua hasil atau **outcome** disebut ruang sampel dari suatu eksperimen.*

Himpunan semua hasil biasanya dinotasikan dengan Ω atau dalam terminologi statistik disebut ruang sampel .

Contoh 1.2.1

Sebuah eksperimen adalah pelemparan sebuah mata uang seimbang dua kali. Bila M menyatakan

muka dan B belakang, maka

$$\Omega = \{(MM), (MB), (BM), (BB)\}$$

Contoh 1.2.2

Bila eksperimen adalah pencatatan nilai mata kuliah Statistik Dasar pada suatu kelas, maka

$$\Omega = [0, 100]$$

Contoh 1.2.3

Dalam eksperimen pelemparan sebuah dadu seimbang

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Contoh 1.2.4

Untuk eksperimen dengan pelemparan sebuah mata uang sampai mendapat M atau muka,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Ruang sampel kita klasifikasikan menjadi dua jenis berdasarkan jumlah elemen yang dimilikinya. Bila terdapat korespondensi 1-1 antara Ω dan himpunan bagian dari $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, maka ruang sampelnya disebut terhitung atau *countable*. Dengan sendirinya ruang sampel yang terdiri dari sejumlah berhingga elemen termasuk himpunan terhitung. Bila Ω takhingga dan Ω tidak berkorespondensi 1-1 dengan N , maka Ω disebut tak terhitung atau *uncountable*. Ruang sampel pada contoh 1.2.1 dan 1.2.3 disebut terhitung karena berhingga. Ruang sampel pada contoh 1.2.4 juga disebut terhitung karena $\Omega = N$. Karena Ω dalam contoh 1.2.2 tidak berkorespondensi 1-1 dengan N , maka Ω disebut tak terhitung.

Begitu ruang sampel terdefiniskan, kita bisa memperlihatkan himpunan bagian "yang lebih kecil" dari Ω .

Definisi 1.2.2. Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari Ω termasuk ϕ dan Ω sendiri.

Definisi 1.2.3. \emptyset disebut kejadian mustahil atau *impossible event* sedangkan Ω disebut kejadian pasti atau *sure event*.

Contoh 1.2.5

Dalam contoh 1.2.1 bila A menyatakan kejadian lemparan yang menghasilkan hasil yang sama, maka $A = \{(MM), (BB)\}$.

Contoh 1.2.6

Untuk contoh 1.2.3 bila B adalah kejadian muka yang tampak bilangan genap, maka

$$B = \{2, 4, 6\}$$

Hubungan antara ruang sampel dan kejadian bisa ditunjukkan dalam bentuk diagram Venn seperti terlihat pada gambar 1.2.1.