PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Model Matematika Fenomena Perubahan

GRAHA ILMU

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Model Matematika Fenomena Perubahan

Kartono

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Model Matematika Fenomena Perubahan

Oleh : Kartono

Edisi Pertama
Cetakan Pertama, 2012

GRAHA ILMU
Ruko Jambusari No. 7A
Yogyakarta 55283
Telp. : 0274-889836; 0274-889398
Fax. : 0274-889057
E-mail : info@grahailmu.co.id

Kartono
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA; Model Matematika Fenomena Perubahan/Kartono
- Edisi Pertama – Yogyakarta; Graha Ilmu, 2012
x + 224, 1 Jil. : 26 cm.

ISBN: 978-979-756-810-8

1. Matematika I. Judul

KATA PENGANTAR

Segala puji dan hormat bagi Tuhan yang Maha Kasih, yang senantiasa melimpahkan kasih dan anugerah-Nya sehingga buku yang berjudul *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan* ini dapat terselesaikan dengan baik. Buku ini disusun untuk memenuhi kewajiban peneliti yang telah menerima Program Hibah Penelitian Fundamental DP2M Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi tahun 2007 dan 2009, sehingga buku ini memuat materi-materi hasil kajian referensi terpilih dan hasil-hasil penelitian sebagai materi pengayaan. Buku ini ditulis dengan harapan dapat memenuhi kriteria buku berbasis riset.

Di samping membahas metode-metode penyelesaian persamaan diferensial biasa, baik analitik maupun numerik, secara manual maupun menggunakan bantuan *software*, fokus pembahasan dalam buku ini diharapkan mampu memotivasi dan membangun kompetensi dalam menerapkan persamaan diferensial biasa sebagai model matematika dalam menyelesaikan masalah nyata. Dengan semakin banyak mengenal contoh model matematika yang berbentuk persamaan diferensial biasa akan semakin mengerti mengapa persamaan diferensial harus dipelajari. Hal ini tidak mengherankan karena persamaan diferensial memang memodelkan perilaku atau fenomena perubahan, dan yang pasti terjadi di dunia nyata adalah perubahan itu sendiri.

Melalui berbagai metode penyelesaian dari referensi terpilih, akhirnya fungsi yang belum diketahui mempunyai perilaku perubahan yang dimodelkan oleh persamaan diferensial itu akan ditemukan. Setelah fungsi yang semula belum diketahui dan akhirnya ditemukan, yang disebut solusi maka konsep-konsep dalam kalkulus dapat diterapkan. Jadi persamaan diferensial merupakan ujung tombak dalam menerapkan konsep matematika untuk menyelesaikan masalah fenomena perubahan di dunia nyata.

Kenyataan menunjukkan bahwa perubahan (meningkat atau menyusut, bertumbuh atau berkurang) merupakan fenomena yang terjadi di kehidupan nyata sehari-hari. Oleh karena itu, khalayak sasaran buku ini mencakup hampir semua kalangan dari berbagai bidang ilmu antara lain Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Teknik (Rekayasa), Ekonomi, Keuangan, Kedokteran, Kesehatan, Peternakan, Perikanan, Pertanian, bahkan Psikologi. Di dunia nyata, yang sering diketahui adalah laju (tingkat) perubahan dari satu variabel terhadap perubahan variabel lain yang mempunyai hubungan fungsional. Dalam situasi ini, mencari yang mempunyai laju perubahan itu menjadi masalah yang cukup rumit dan disinilah peranan persamaan diferensial sangat besar untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Penghargaan dan ucapan terima kasih kepada DP2M Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi yang telah memberikan dana hibah penelitian fundamental dan kesempatan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Kepada Rektor dan Ketua Lembaga Penelitian Universitas Diponegoro Semarang, penulis mengucapkan terima kasih atas kepercayaan dan pembinaan yang diberikan yang memampukan penulis untuk mengembangkan diri di bidang penelitian. Kepada Dekan FMIPA Universitas Diponegoro Semarang dan teman-teman sejawat yang tergabung dalam tim penelitian, penulis mengucapkan terima kasih atas segala kerja sama yang terjalin baik.

Terima kasih yang tak terhingga kepada istriku tercinta, Dwi Endang Sujati, S.Th, M.Hum, yang selalu memberikan motivasi agar buku ini dapat selesai dan segala koreksinya terhadap pemakaian bahasa Indonesia yang baik dan benar. Untuk anak-anakku tercinta: Intan Kurnia Putri, Berlian Adi Putra, dan Safira Widya Christy atas segala pengertiannya, papa mengucapkan terima kasih. Buku ini kupersembahkan untuk kalian semua.

Kepada pihak penerbit, penulis mengucapkan terima kasih atas kepercayaan dan kerja samanya sehingga buku ini dapat diterbitkan dengan harapan dapat berguna bagi pengembangan ilmu pengetahuan. Penulis mohon dimaafkan atas kesalahan/kekurangan, baik secara akademis maupun tata tulisnya.

Semarang, September 2011

Kartono

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR **v**

DAFTAR ISI **vii**

BAB 1 PERSAMAAN DIFERENSIAL SEBAGAI MODEL MATEMATIKA **1**

1.1 Pengertian Persamaan Diferensial 1
1.2 Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas 5
1.3 Peranan Persamaan Diferensial dalam Pemodelan Matematika Masalah Nyata 9
1.4 Beberapa Contoh Model Matematika yang Berbentuk Persamaan Diferensial Biasa 12
1.5 Konstruksi Model Matematika melalui Penelitian Empiris 21
1.6 Konstruksi Model Matematika melalui Penelitian Kepustakaan 25
1.7 Soal Latihan 27

BAB 2 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE PERTAMA **29**

2.1 Pengertian Persamaan Diferensial Orde Pertama 29
2.2 Persamaan dengan Variabel Terpisah 30
2.3 Persamaan Diferensial Homogen 32
2.4 Persamaan Diferensial dengan $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ adalah Linier tetapi tidak Homogen 33
2.5 Persamaan Diferensial Eksak 37
2.6 Persamaan Diferensial Linier Orde Pertama 40
2.7 Trayektori 42
2.8 Metode Deret Pangkat pada Persamaan Diferensial Orde Pertama 44
2.9 Persamaan Diferensial Orde Pertama Derajat Tinggi 48
2.10 Penyelesaian Model Matematika 52
2.11 Soal Latihan 61

BAB 3 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE ke-n DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA 63

3.1 Persamaan Diferensial Linier Orde Kedua dengan Koefisien Konstanta 63
3.2 Masalah Nilai Awal Orde Kedua 65
3.3 Perilaku Solusi Persamaan Diferensial Linier Orde Kedua Homogen dengan Koefisien Konstanta 67
3.4 Persamaan Diferensial Linier Orde ke-n dengan Koefisien Konstanta 70
3.5 Beberapa Aplikasi Persamaan Diferensial Biasa Orde Kedua 84
3.6 Soal Latihan 94

Bab 4 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER DENGAN KOEFISIEN VARIABEL 97

4.1 Persamaan Euler-Cauchy 97
4.2 Persamaan Diferensial Linier Orde ke-n dengan Koefisien Variabel 100
4.3 Metode Deret Pangkat dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Kedua 104
4.4 Soal Latihan 117

Bab 5 SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER 119

5.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier Orde Pertama 119
5.2 Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier 122
5.3 Sistem Otonom 136
5.4 Contoh Aplikasi 145
5.5 Soal Latihan 153

Bab 6 PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE NUMERIK 155

6.1 Solusi Aproksimasi 155
6.2 Metode Euler 156
6.3 Metode Euler yang Diperbaiki 159
6.4 Metode Runge-Kutta 163
6.5 Solusi Numerik untuk Persamaan Diferensial Orde Kedua 166
6.6 Metode Numerik untuk Sistem Persamaan Diferensial Orde Pertama 173
6.7 Soal Latihan 175

Bab 7 PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN SOFTWARE 177

7.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Pertama dengan Maple 177
7.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Kedua dengan Aplikasi *Maple* 189
7.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde yang Lebih Tinggi dengan Maple 193
7.4 Aplikasi Maple pada Sistem Persamaan diferensial 196

7.5 Aplikasi Maple untuk Solusi Deret Pangkat 200
7.6 Aplikasi Maple dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace 202
7.7 Metode Numerik untuk Persamaan diferensial dengan Maple 206
7.8 Analisis Dnamik Epidemik dalam Contoh 5.16 212
7.9 Soal Latihan 216

DAFTAR PUSTAKA **217**

DAFTAR INDEKS **219**

TENTANG PENULIS **223**

-oo0oo-