

Kalkulus Lanjut

**Fungsi Banyak Variabel &
Penerapannya**

 GRAHA ILMU

Kalkulus Lanjut

**Fungsi Banyak Variabel &
Penerapannya**

PRAYUDI

KALKULUS LANJUT

Oleh: Prayudi

Edisi Pertama
Cetakan pertama, 2009

Hak Cipta © 2009 pada penulis,
Hak Cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya, tanpa ijin tertulis dari penerbit.



GRAHA ILMU

Candi Gebang Permai Blok R No. 6
Yogyakarta 55511
Telp./Fax.: 0274-882262; 0274-4462135
Fax. : 0274-4462136
E-mail : info@grahailmu.co.id

dan

Prayudi

KALKULUS LANJUT/Prayudi

– Edisi Pertama – Yogyakarta; Graha Ilmu, 2009
xii + 496 hlm, 1 Jil. : 26 cm.

ISBN: 978-979-756-460-5

1. Kalkulus

I. Judul

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan hanya untuk Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayahnya, sehingga atas izin Allah, Alhamdulillah buku yang cukup sederhana ini dapat diterbitkan. Buku Kalkulus Lanjut atau Matematika Teknik Lanjut ini pada dasarnya merupakan lanjutan dari Buku Kalkulus Fungsi Satu Variabel yang telah diterbitkan terdahulu. Setelah mengalami berbagai revisi setelah mendapatkan masukan dari mahasiswa, asisten dan beberapa dosen rekan sejawat, akhirnya terbentuk suatu buku yang sederhana dan cukup lengkap.

Buku ini lebih ditujukan untuk membantu mahasiswa pada tahun kedua yang mengambil mata kuliah Matematika Teknik atau Kalkulus Lanjut khususnya yang mempelajari masalah analisis fungsi dengan banyak variabel dan penerapannya. Oleh karenanya buku ini disusun dalam rangka menjawab masalah tersebut. Buku ini disusun terdiri atas enam bab, yang meliputi Fungsi n variabel, Turunan Parsial dan Aplikasinya, Integral Lipat Dua dan Lipat Tiga, Kalkulus Medan Vektor, Deret Tak Hingga, Fungsi Gamma dan Fungsi Beta. Sasaran buku ini ditujukan untuk mahasiswa pada tahun kedua di fakultas teknik, sains dan atau teknologi lainnya yang sedang mengambil mata kuliah Kalkulus Lanjut atau Matematika Teknik. Oleh karena itu, sebagaimana buku-buku yang pernah penulis susun, pembahasan pada buku ini lebih menekankan pada penggunaan teori, definisi dan teorema, sehingga teorema-teorema yang ada tidak dibuktikan kebenarannya. Hal ini sejalan dengan tujuan diterbitkannya buku ini untuk membantu mahasiswa memahami masalah analisis turunan parsial dan penerapannya, integral berulang lipat dua dan

lipat tiga, analisis kalkulus medan vektor, deret tak hingga, dan terakhir dibahas fungsi Gamma dan fungsi Beta. Harapan dengan digunakannya buku ini sebagai salah satu referensi adalah agar mata kuliah Matematika Teknik atau Kalkulus Lanjut tidak dijadikan sebagai mata kuliah yang “ditakuti” mahasiswa.

Letak keunggulan dari buku ini adalah bahwa buku ini lebih menekankan pada bagaimana menyelesaikan masalah, namun demikian tidak meninggalkan kaidah-kaidah secara teori. Oleh karenanya pendekatan yang digunakan pada pembahasan buku ini adalah pada setiap awal sub bab diupayakan adanya pengantar teori, dan selanjutnya diteruskan dengan teori yang terdiri atas definisi dan teorema, selanjutnya diteruskan dengan contoh-contoh soal. Sehingga teorema-teorema dalam buku ini sengaja tidak dibuktikan, dan bagi pembaca yang mengharapkan adanya bukti dari teorema dan atau rumus disarankan untuk membaca lebih lanjut pada buku referensi yang ditunjuk. Pendekatan ini dicoba ditempuh, supaya mahasiswa dan atau pembaca pada umumnya tidak terjebak pada masalah pembuktian teorema, tetapi lebih menekankan pada penggunaan teorema.

Pada setiap pembahasan contoh soal, diupayakan tahapan dan langkah-langkah yang digunakan dapat diikuti dengan mudah oleh mahasiswa. Sehingga mahasiswa dan atau pembaca pada umumnya lebih mudah memahami analisis fungsi n variabel, turunan parsial dan penerapannya, integral lipat dua dan lipat tiga, analisis kalkulus medan vektor, deret tak hingga, dan terakhir dibahas fungsi Gamma dan fungsi Beta. Selanjutnya pada akhir sub bab diberikan soal-soal latihan, dengan harapan soal-soal tersebut dapat menambah pendalaman materi. Oleh karenanya soal-soal yang disajikan dapat dikerjakan oleh mahasiswa, dengan tingkat kesulitan yang sepadan dengan mahasiswa baru tahun kedua.

Pada Bab 1 Pendahuluan dibahas tentang ruang dimensi tiga, vektor dalam ruang, garis dan bidang, permukaan benda pejal dalam ruang, dan terakhir dibahas koordinat silinder dan koordinat bola. Pada Bab 2 dibahas tentang fungsi n variabel, turunan parsial, diferensial total, maksimum minimum dan metode langrange. Bab 3 dibahas tentang pengertian integral lipat dua, transformasi integral lipat dua, integral lipat tiga, integral lipat tiga dalam koordinat silinder dan koordinat bola, penerapan integral lipat dua dan lipat tiga. Bab 4 dibahas analisis Kalkulus Medan Vektor yang meliputi medan vektor dan medan skalar, medan vektor konservatif, integral garis, kebebasan lintasan integral garis, teorema Grenn, integral permukaan dan fluks medan vektor, teorema divergensi Gauss dan teorema stokes. Pada Bab 5 Deret Tak Hingga dibahas deret tak hingga, deret berganti tanda, deret pangkat, operasi deret pangkat, deret Taylor dan uji

konvergensi deret tak hingga. Pada bab terakhir dibahas khusus tentang fungsi Gamma dan fungsi Beta serta penerapannya.

Pada akhirnya penulis berterima kasih kepada istri tercinta Lidya Suryani Widyawati, SH, M.Hum, anak tercinta Abimanyu Putera Yudha dan Alya Zahra Puteri Yudha atas dorongan dan kasih sayangnya dan waktu yang diluangkan. Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada asisten mata kuliah Kalkulus dan Matematika Teknik Hendri ST, MT, dan rekan-rekan sejawat yang telah memberi masukan dan bantuan sehingga buku ini dapat diselesaikan. Penulis juga berterima kasih pada pihak penerbit Graha Ilmu dengan segala risiko yang akan ditanggung telah bersedia menerbitkan buku ini.

April 2008

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	ix
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1. Ruang Dimensi Tiga	1
Soal-soal Latihan	9
1.2. Vektor Dalam Ruang Dimensi Dua dan Tiga	10
Soal-soal Latihan	30
1.3. Permukaan Benda Dalam Ruamh Dimensi Tiga	32
Soal-soal Latihan	45
1.4. Koordinat Silinder dan Koordinat Bola	47
Soal-soal Latihan	55
BAB 2 TURUNAN PARSIAL DAN PENERAPANNYA	57
2.1. Fungsi n Variabel	57
Soal-soal Latihan	64
2.2. Turunan Parsial	65
Soal-soal Latihan	77
2.3. Aturan Rantai	79
Soal-soal Latihan	89

2.4.	Diferensial Total dan Hampiran	91
	Soal-soal Latihan	105
2.5.	Gradien dan Turunan Berarah	107
	Soal-soal Latihan	114
2.6.	Bidang Singgung dan Normal Bidang Permukaan	116
	Soal-soal Latihan	122
2.7.	Maksimum dan Minimum	123
	Soal-soal Latihan	133
2.8.	Metode Lagrange	135
	Soal-soal Latihan	143
BAB 3	INTEGRAL LIPAT DUA DAN TIGA	145
3.1.	Integral Lipat Dua Atas Daerah Empat Persegi Panjang	145
	Soal-soal Latihan	155
3.2.	Integral Lipat Dua Atas Daerah Umum R	156
	Soal-soal Latihan	168
3.3.	Transformasi Koordinat Integral Lipat Dua, Koordinat Kutub	170
	Soal-soal Latihan	178
3.4.	Penerapan Integral Lipat Dua	180
	Soal-soal Latihan	189
3.5.	Integral Lipat Tiga	191
	Soal-soal Latihan	204
3.6.	Koordinat Silinder dan Koordinat Bola	207
	Soal-soal Latihan	224
BAB 4	KALKULUS MEDAN VEKTOR	229
4.1.	Medan Skalar dan Medan Vektor	229
	Soal-soal Latihan	241
4.2.	Medan Vektor Konservatif	242
	Soal-soal Latihan	253
4.3.	Integral Garis	255
	Soal-soal Latihan	268
4.4.	Kebebasan Lintasan Integral Garis	271
	Soal-soal Latihan	278

4.5.	Teorema Grenn	281
	Soal-soal Latihan	299
4.6.	Integral Permukaan dan Fluks Medan Vektor	301
	Soal-soal Latihan	322
4.7.	Teorema Divergensi Gauss dan Teorema Stokes	325
	Soal-soal Latihan	352
BAB 5	DERET TAK HINGGA	359
5.1.	Barisan Tak Hingga	359
	Soal-soal Latihan	370
5.2.	Deret Tak Hingga	371
	Soal-soal Latihan	383
5.3.	Uji Konvergensi Deret Suku-suku Positif	384
	Soal-soal Latihan	396
5.4.	Deret Berganti Tanda, dan Konvergensi Mutlak	397
	Soal-soal Latihan	409
5.5.	Deret Pangkat	410
	Soal-soal Latihan	420
5.6.	Diferensial dan Integrasi Deret Pangkat	421
	Soal-soal Latihan	434
5.7.	Deret Taylor dan MacLaurin	435
	Soal-soal Latihan	448
BAB 6	FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA	451
6.1.	Fungsi Gamma	451
	Soal-soal Latihan	472
6.2.	Fungsi Beta	275
	Soal-soal Latihan	490
DAFTAR PUSTAKA		493
TENTANG PENULIS		495