

KALKULUS

 GRAHA ILMU

KALKULUS

A.B. Panggabean

KALKULUS

Oleh : A.B. Panggabean

Edisi Pertama
Cetakan Pertama, 2008

Hak Cipta 2008 pada penulis,
Hak Cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apa pun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya, tanpa izin tertulis dari penerbit.



GRAHA ILMU

Candi Gebang Permai Blok R/6

Yogyakarta 55511

Telp. : 0274-4462135; 0274-882262

Fax. : 0274-4462136

E-mail : info@grahailmu.co.id

Panggabean, A.B.

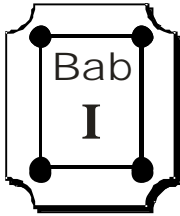
KALKULUS/A.B. Panggabean

- Edisi Pertama - Yogyakarta; Graha Ilmu, 2008
x + 272 hlm, 1 Jil. : 23 cm.

ISBN: 978-979-756-320-2

1. Teknik

I. Judul



FUNGSI

1.1 PENGERTIAN AWAM

Jika p harga suatu barang A tergantung dari banyaknya barang A yang tersedia ($=x$), maka dikatakan harga barang A fungsi dari banyaknya barang A ($=x$).

Ditulis $p = f(x)$, dibaca p fungsi dari x .
 x disebut peubah/variabel bebas
 p disebut peubah/variabel tidak bebas
 $p = f(x)$ disebut juga fungsi dengan peubah/variabel (satu bebas x dan satu tidak bebas p).

Andaikan kita menjemur cucian kain A , tentu kita ingin menjemurnya pada tempat yang panas dan terbuka agar hembusan angin banyak/kuat. Jelas bahwa keringnya kain A (mis $= Z$) tergantung dari panasnya matahari (mis x) dan kuatnya hembusan angin ($= y$). Dikatakan keringnya kain A ($= Z$) adalah fungsi dari panasnya matahari ($= x$) dan kuatnya hembusan angin ($= y$), ditulis $Z = f(x, y)$.

Disebut juga fungsi dengan tiga peubah/variabel x, y, z yang dua bebas x dan y dan satu tidak bebas ialah z .

Selanjutnya dapat diperluas dengan

$$U = f(x, y, z, w, \dots, s, t)$$

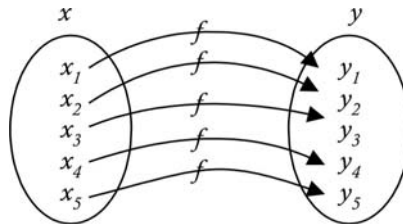
x, y, z, w, \dots, s, t peubah/variabel bebas dan u peubah/variabel tidak bebas.

1.2 PENGERTIAN MATEMATIS

Andaikan ada dua himpunan X dan Y dengan x_1, x_2, x_3, \dots adalah unsur/elemen $x \in X$ dan y_1, y_2, y_3, \dots adalah unsur/elemen $y \in Y$.

Andaikan tiap unsur $x \in X$ berpadanan/berkaitan tepat satu unsur $y \in Y$ maka kaitan itu membentuk suatu fungsi X ke Y . Dalam aljabar biasanya fungsi dengan unsur x dari wilayah/domain X berkaitan dengan unsur y dari jangkau/range Y dan ditulis: $f: x \rightarrow y$ dibaca f membawa x ke y dengan $x \in X$ dan $y \in Y$.

Dapat digambarkan dengan diagram sebagai berikut:



Dua unsur dari X dapat dikaitkan dengan satu unsur dari Y tetapi tidak sebaliknya. Unsur $x \in X$ habis, sedang unsur $y \in Y$ tidak perlu habis.

Lebih lazim ditulis: $y = f(x)$, dibaca y fungsi x
 x disebut variabel/peubah bebas
 y disebut variabel/peubah tidak bebas.

Contoh:

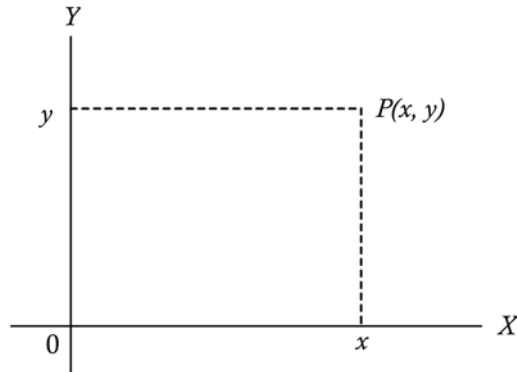
$$y = f(x) = 2x - 6. \text{ dengan } x = (1, 2, 3, \dots, 9).$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 6 = -4 \text{ disebut nilai fungsi itu untuk } x = 1$$

$f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$ disebut nilai fungsi itu untuk $x = 2$

$f(a) = 2 \cdot a - 6 = 2a - 6$ disebut nilai fungsi itu untuk $x = a$

1.3 SISTEM KOORDINAT CARTESIUS (TEGAK)



Gambarlah pada suatu bidang rata suatu garis lurus mendatar x dan suatu garis lurus tegak y . Garis x disebut sumbu mendatar dan garis y disebut sumbu tegak.

Perpotongan dua sumbu x dan y disebut titik awal dan ditulis sebagai 0 ($0, 0$). Tiap titik pada sumbu $-x$ disebut absis dan tiap titik pada sumbu y disebut ordinat; absis dan ordinat disebut koordinat-koordinat.

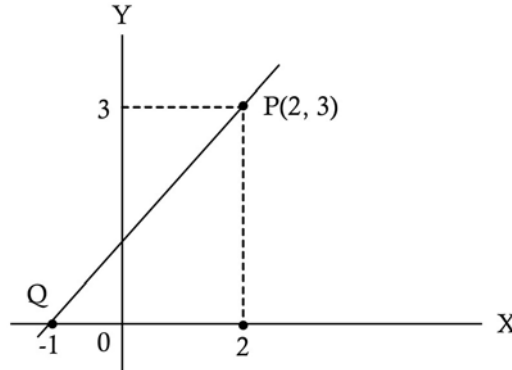
Suatu titik pada bidang rata dalam sistem Cartesius ditulis dengan $P(x, y)$ dengan x absis dan y ordinat.

1.4 GRAFIK SUATU FUNGSI

Dua titik $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ pada bidang cartesius dihubungkan menentukan sebuah garis lurus dan disebut *grafik* dari garis yang melalui dua titik itu.

Contoh:

Gambar grafik dari garis yang melalui dua titik P(2, 3) dan Q(-1, 0):

**1.4.1 Fungsi Linier (Grafiknya Garis Lurus)**

Bentuk umum: $y = ax + b$. (a, b : tetapan)

Untuk menggambar grafik suatu fungsi, kita tidak lagi menggunakan cara titik demi titik, melainkan dengan memperhatikan sifat matematika dari fungsi itu.

Karena suatu garis lurus cukup ditentukan oleh dua titik, maka kita cukup mengambil titik pada sumbu x dan titik pada sumbu y . Selanjutnya dua titik itu dihubungkan, didapatlah grafik dari garis lurus itu.

Contoh:

1. Gambar grafik dari $y = f(x) = 2x + 3$.
 - Perpotongan dengan sumbu x /titik pada sumbu $-x$ didapat jika

$$y = 0 \rightarrow 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \rightarrow A(-\frac{3}{2}, 0)$$
 - Perpotongan dengan sumbu y /titik pada sumbu $-y$ didapat jika

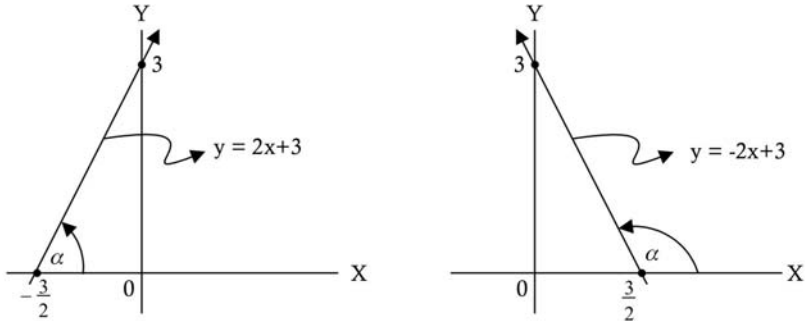
$$x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow B(0, 3).$$

2. Gambar grafik dari $y = f(x) = -2x + 3$.

- Perpotongan dengan sumbu $-x$, $y = 0$

$$\rightarrow 0 = 2x + 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

- Perpotongan dengan sumbu $-y$, $x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow Q(0, 3)$.

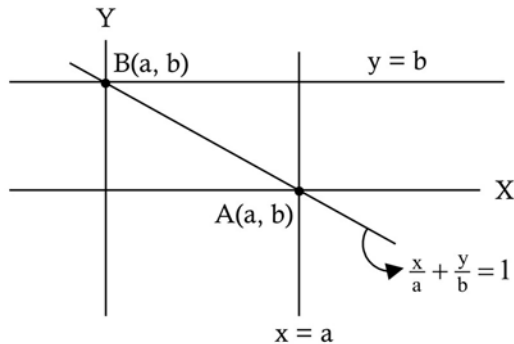


α : sudut antara garis lurus dengan sumbu $-x +$

$\alpha > 90 \rightarrow \tan \alpha < 0$ arah garis dari kanan bawah ke kiri atas

$\alpha < 90 \rightarrow \tan \alpha > 0 \rightarrow$ arah garis dari kiri bawah ke kanan atas.

3. Persamaan garis lurus dengan penggal-penggal pada sumbu-sumbu.



Persamaan garis lurus 1: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Jika A ditempatkan di jauh tak berhingga maka absis a juga mendekati ∞ .

Sehingga $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ menjadi $\frac{x}{\infty} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow 0 + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow y = b$.

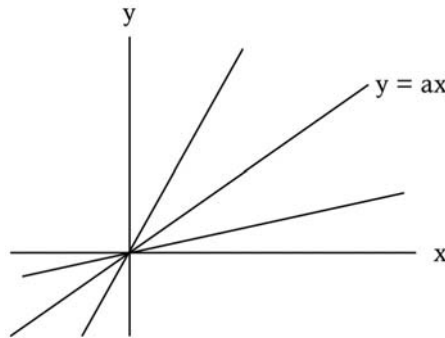
$y = b$ ialah persamaan garis lurus sejajar sumbu $-x$ sejauh b dari sumbu $-x$; juga jika $B(0, b)$ ditempatkan di tak berhingga, maka

$b \rightarrow \infty$. Sehingga $\frac{x}{a} + \frac{y}{\infty} = 1 \rightarrow \frac{x}{a} + 0 = 1 \rightarrow x = a$ adalah

persamaan garis sejajar sumbu $-y$ dengan jarak a dari sumbu $-y$.

Selanjutnya $y = 0 \rightarrow$ persamaan sumbu x dan $x = 0$ persamaan sumbu y

Untuk setiap gradient/tanjakan $a \rightarrow y = ax$ garis lurus yang melalui titik $0(0, 0)$.



Persamaan garis lurus dapat juga ditulis dalam bentuk:

$Ax + By + C = 0 \rightarrow y = -\frac{A}{B}X - \frac{C}{B}$ atau $y = mx + n$ dengan

$$m = -\frac{A}{B}, n = -\frac{C}{B}.$$